

**GEORGE POLYA I JEGO DOBRE RADY DLA NAUCZYCIELI METEMATYKI
NA TLE WYBRANYCH KONCEPCJI EFEKTYWNEGO NAUCZANIA**

Tomasz Szwed
Uniwersytet Opolski,
ul. Oleska 48, 45-052 Opole, Polska
E-mail: tesz@interia.eu



„To, co byliście zmuszeni odkryć sami,
pozostawia w waszym umyśle ścieżkę,
z której możecie skorzystać na nowo,
gdy zajdzie taka potrzeba”
G. C. Lichtenberg: Aphorismen

ABSTRAKT

Teza. Skuteczne nauczanie matematyki jest umiejętnością pedagogiczną niezwykle rzadką. Opiera się bowiem na osobowości nauczyciela, jego relacjach z uczniem i efektywnym procesie nauczania – uczenia. Sukces w tym obszarze jest zależny od wielu czynników, ale przede wszystkim od postawy nauczyciela.

Omówione koncepcje. W artykule zostały opisane strategie skutecznego nauczania oparte na wynikach badań ogólnoswiatowych oraz polskich doświadczeniach metodycznych w nauczaniu różnych przedmiotów. Pokazane są strategie oceniania kształtującego, szczególnie efektywne praktyki nauczania promowane przez TC w Nowym Jorku oraz podstawy dobrego nauczania Billa Johnsona i Jo Boaler. Na tle tych koncepcji przedstawiony jest pomysł na nauczanie matematyki Georga Polya. Jego odkrycia opublikowane w 1962 roku zdają się nie odbiegać od nowoczesnych trendów ostatnich kilku lat.

Wyniki i wnioski. Matematyka i jej nauczanie rządzą się swoimi prawami. Nie mają zamierzonej siły oddziaływania metody nauczania i uczenia się uczniów, jeśli podstawą nie są serdeczność, konsekwencja i pozytywne nastawienie nauczyciela mającego dobre relacje ze swoim uczniem. Takie podejście może wspomóc i uskutecznić sposoby nauczania i uczenia się uczniów.

Oryginalność/wartość poznawcza podejścia. Prezentowany materiał jest syntezą kilku ważnych i efektywnych strategii nauczania. W kontekście problemów z nauczaniem matematyki, które ujawniają się w wynikach egzaminów zewnętrznych, pokazanie ich szerokiemu gronu odbiorców, w szczególności nauczycieli matematyki, może przynieść bardzo wymierne rezultaty. Zestawienie koncepcji nowych z koncepcją niemal z połowy XX wieku, wydaje się bardzo oryginalne i intrygujące.

Słowa kluczowe: matematyka, skuteczność, efektywność, nastawienie na rozwój, odkrycie matematyczne, Polya.

George Polya and his good advice for mathematics teachers on the background of conceptions of effective teaching

ABSTRACT

Thesis. Efficient mathematics teaching is an extremely rare pedagogical skill, as it relies on the teacher's personality, his/her relationship with pupils and effective teaching-learning process. Success in this area is dependent on many factors, but first of all on the teacher's attitude.

Discussed conceptions. The article describes the strategies of efficient teaching based on the results of worldwide tests and Polish methodological experiences in teaching of various subjects. The strategies of formative assessment are shown, in particular the effective teaching practice promoted by TC in New York as well as Bill Johnson's and Jo Boaler's basics of good teaching. Against the background of these conceptions George Polya's idea for teaching mathematics is presented. His discoveries published in 1962 seem not to depart from modern trends in recent years.

Results and conclusions. Mathematics and mathematics teaching have their own rules. They do not have the intended impact of pupils' teaching and learning method if the basis are not cordiality, consequence and positive attitude of the teacher who has good relations with his/her pupils. Such an approach can support and make the methods of pupils' teaching and learning efficient.

Originality/cognitive value of the approach. The material presented is a synthesis of several significant and effective teaching strategies. In the context of problems with teaching mathematics, which are exposed in the results of external exams, their demonstration to a wide circle of recipients, in particular to maths teachers, can bring very measurable results. Comparison of new conceptions with the conception from almost half of the 20th century seems very original and intriguing.

Key words: mathematics, efficiency, effectiveness, focus on development, mathematical discovery, Polya

WPROWADZENIE

„Matematyka i jej nauczanie rządzą się swoimi prawami”. To zdanie, wypowiedziane przed kilku laty przez profesora Henryka Kąkola, stało się dla mnie inspiracją do poszukiwania, znalezienia i zastosowania praw stojących za nauczaniem Królowej Nauk. Nauczaniem pasjonującym, pięknym, ale przede wszystkim efektywnym. Istnieje wiele koncepcji efektywnego nauczania. Ostatnie lata przyniosły w tym zakresie istotny postęp, a wyniki badań dają podstawy naukowe do zastosowania tych zasad w codziennej pracy nauczycieli. Niniejszy artykuł jest próbą zestawienia kilku ważnych koncepcji efektywnego nauczania. Na ich tle zostanie zaprezentowany pomysł pewnego dydaktyka matematyki węgierskiego pochodzenia. Prostota tego pomysłu oraz czas jego publikacji są dość intrygujące. *Odkrycie matematyczne* George Polya zostało opublikowane w 1962 roku. Praktyczny przekaz i zachęcający opis mogą być niezwykle inspiracją dla nauczycieli – refleksyjnych praktyków, ciągle poszukujących recepty na efektywne nauczanie. Celem niniejszego artykułu jest pokazanie wizji dobrego nauczania matematyki G. Polya na tle kilku wybranych współczesnych koncep-

cji efektywnego nauczania oraz zachęcenie nauczycieli, w szczególności matematyki, do refleksji nad swoim warsztatem pracy.

DOBRE NAUCZANIE W PUBLIKACJACH ORGANIZACJI WSPÓŁPRACY GOSPODARCZEJ I ROZWOJU (OECD)

Na szczególną uwagę zasługują publikacje przygotowane przez OECD w ramach współpracy z UNESCO. Organizacja ta zajmuje się m. in. upowszechnianiem wyników badań nad efektywnością nauczania. Rozpocznę opis kilku koncepcji nauczania różnych przedmiotów. Jere Brophy (1999) do warunków dobrego i skutecznego nauczania zalicza dwanaście komponentów: sprzyjająca atmosfera w klasie, sprzyjające warunki do nauki, spójność programowa, wprowadzenie do nauki i uczenia się, spójność i logiczna struktura treści nauczania, przemyślenia i dyskusja, ćwiczenia i zadania mające na celu wykorzystanie zdobytej wiedzy w praktyce, stopniowe zaangażowanie uczniów do samodzielnej pracy, nauczanie strategii uczenia się, wspólne uczenie się, ocenianie realizacji celów kształcenia oraz oczekiwane osiągnięcia uczniów. Herbert J. Walberg i Susan J. Paik (2000) postulują następujące elementy składowe efektywnego nauczania: zaangażowanie rodziców, ocenianie pracy domowej, czas przeznaczony na wykonanie zadań, nauczanie bezpośrednio, organizacja nauki, uczenie strategii uczenia się, tutoring, czyli wzajemne wspieranie się w nauce, stopniowe dochodzenie do mistrzostwa, praca zespołowa oraz kształcenie dostosowane do indywidualnych potrzeb i możliwości. Według Stelli Vosniadou (2001) na dobre nauczanie powinny składać się niżej wymienione składowe: aktywne zaangażowanie uczniów i ich uczestnictwo w życiu społecznym, przydatne i użyteczne działania, odnoszenie nowej wiedzy do już nabytej, bycie strategiem, samokontrola i autorefleksja, uporządkowanie uprzednio zdobytej wiedzy, wykorzystanie szkolnej wiedzy w praktyce oraz akceptowanie różnic indywidualnych i rozwojowych oraz tworzenie motywacji.

Glenda Anthony i Margaret Walshaw (2009) opisują rezultaty badań skupionych na nauczaniu matematyki. Na podstawie ich badań organizowany jest system nauczania matematyki w Nowej Zelandii. Autorki podkreślają, że opiekuńcze zespoły klasowe skoncentrowane na celach matematycznych pomagają uczniom rozwijać ich tożsamość i kompetencje matematyczne. Poczucie bezpieczeństwa, wzajemna troska uczniów i nauczyciela, swoboda wypowiedzi i zaufanie sprzyjają dobremu nauczaniu i uczeniu się. Efektywni nauczyciele dają uczniom szanse zarówno pracy wspólnej, jak i samodzielnej tak, aby lepiej zrozumieć pojęcia matematyczne. Pomocna jest praca w parach lub małych grupkach z przydziałem uczniom konkretnej odpowiedzialności za wykonywanie zadań społecznych i merytorycznych. Nauczyciele planują doświadczenia uczenia się matematyki tak, aby umożliwić uczniom budowanie na istniejących kompetencjach, zainteresowaniach i dotychczasowym doświadczeniu. Korzystają również z zasobów edukacyjnych uczniów stanowiących obszar fundamentalny dla dalszego nauczania. Rozumieją również, że zadania i przykłady, które wybierają wpływają na to, jak uczniowie postrzegają matematykę, rozwijają umiejętności w tej dziedzinie, jak również stosują i rozumieją matematykę. Wobec tego bardzo ważnym narzędziem jest odpowiednio dobrane zadanie matematyczne. Skuteczni nauczyciele wspierają uczniów w tworzeniu związków pomiędzy różnymi sposobami rozwiązywania zadań,

między reprezentacjami i tematami matematycznymi oraz między matematyką i codziennymi doświadczeniami uczniów. Istotną rolę w procesie nauczania pełni ocenianie, dlatego nauczyciele stosują taki zakres praktyk oceniania, który czyni myślenie uczniów widocznym i wspiera uczenie się matematyki. Są w stanie ułatwić dialog klasowy skoncentrowany na argumentacji matematycznej. Takie podejście stanowi podwaliny poprawnego dowodzenia twierdzeń i prezentowania rozumowania. Ponadto kształtują język matematyczny modelując odpowiednie terminy i komunikując ich znaczenie w sposób zrozumiały dla ucznia. Efektywni nauczyciele dokładnie wybierają narzędzia i reprezentacje, aby zapewnić wsparcie dla myślenia uczniów, stosując nowoczesne technologie wspierające dobre rozumienie pojęć, korzystają ze schematów, diagramów i notatek graficznych (wśród polskich nauczycieli matematyki coraz popularniejsza jest GeoGebra. Zaczyna się też pokazywać nieograniczone możliwości środowiska Wolfram Alpha). I wreszcie, nauczyciele rozwijają i stosują logiczną wiedzę, jako podstawę rozpoczęcia uczenia się oraz odpowiadania na potrzeby matematyczne wszystkich swoich uczniów. Wszystkie cztery zaprezentowane koncepcje opierają się na zdobyczach współczesnej pedagogiki, socjologii i psychologii poznawczej. Bez ich udziału trudno sobie wyobrazić dobre nauczanie matematyki.

STRATEGIE EFEKTYWNEGO NAUCZANIA PROGRAMU SZKOŁA UCZĄCA SIĘ

Danuta Sterna i Jacek Strzemieczny w ramach działalności Fundacji Centrum Edukacji Obywatelskiej (CEO) starają się upowszechniać w środowisku edukacyjnym różne metody skutecznego nauczania. Realizując program Szkoła Ucząca Się, CEO przez wiele lat rozwija idee i praktykę oceniania kształtującego. W efekcie wielu lat doświadczeń oraz kontaktów ze środowiskiem naukowym USA, udało się przygotować zestaw pięciu strategii efektywnego nauczania (Sterna, Strzemieczny, 2012, s. 126). Określenie i wyjaśnienie uczniom celów uczenia się i kryteriów sukcesu, organizowanie w klasie dyskusji, zadawanie pytań i zadań, dających informacje, czy i jak uczniowie się uczą. Udzielanie uczniom takich informacji zwrotnych, które umożliwiają im widoczny postęp, wspomaganie uczniów, by stali się autorami, podmiotami, „właścicielami” procesu własnego uczenia się a także umożliwienie uczniom korzystania z siebie nawzajem jako „zasobów edukacyjnych”. Zgodnie z tymi strategiami główną rolą nauczyciela jest spowodowanie uczenia się uczniów. W koncepcji oceniania kształtującego bardzo ważną rolę odgrywa informacja zwrotna oraz refleksja ucznia i nauczyciela nad procesem uczenia i nauczania. Wymienione strategie mogą być użyteczne w nauczaniu każdej dziedziny wiedzy, a zastosowanie ich w nauczaniu matematyki wymaga dobrego przygotowania i elastyczności nauczyciela. Blisko piętnastoletnie doświadczenia CEO w praktycznym wdrażaniu strategii efektywnego nauczania w polskich szkołach dają nadzieję na ich praktyczne zastosowanie w przyszłości, również w edukacji matematycznej.

PRZEGLĄD RÓŻNYCH Koncepcji EFEKTYWNEGO NAUCZANIA

Elizabeth Perrott (1995) wymienia listę obserwowalnych wskaźników skutecznego nauczania w klasie. Koncentrują się one na osobie nauczyciela. E. Perrot wymienia czynniki wyodrębnione przez Ryana:

1. Nauczyciel jest ciepły i wyrozumiały (a nie zimny i powściągliwy).
2. Nauczyciel jest zorganizowany i rzeczowy (a nie bezplanowy i niedbały).
3. Nauczyciel jest stymulujący i pobudza wyobraźnię (a nie nudny i zrutynizowany).

E. Perrot prezentuje również flandersowskie wskaźniki niedyrektywnego stylu nauczania.

1. Nauczyciel zadaje pytania.
2. Nauczyciel akceptuje emocje i uczucia wyrażane przez uczniów.
3. Nauczyciel nagradza uczniów i dodaje im odwagi.

Na szczególną uwagę zasługują korelaty skutecznego nauczania Rosenshine'a i Fursta (Perrot, s. 10).

1. Nauczyciel jest pełen zapału i entuzjazmu.
2. Nauczyciel jest rzeczowy i nastawiony na osiągnięcie celu.
3. Nauczyciel przedstawia treści programowe w sposób jasny i zrozumiały.
4. Nauczyciel posługuje się licznymi metodami i technikami nauczania oraz korzysta z różnorodnych materiałów i pomocy szkolnych.
5. Nauczyciel stwarza uczniom liczne możliwości samodzielnego uczenia się przerabianego materiału.

Obserwowalnymi wskaźnikami skutecznego nauczania (Perrot, s. 10) w klasie jest postępowanie i osiągnięcia uczniów. Uczniowie wykazują wiedzę, rozumienie zjawisk, umiejętności i postawy. Uczniowie przejawiają samodzielność i aktywność w uczeniu się przerabianego materiału. Rosenshine i Berliner (Perrot, s. 10) doszli do wniosku, że wskaźnik określany jako czas przeznaczony na uczenie się jest ważnym czynnikiem wpływającym na osiągnięcia szkolne. To czas, jaki uczeń poświęca na czynności angażujące go w naukę. Im więcej czasu, tym więcej osiągnięć.

Jo-Anne Reid, Peter Forrestal i Jonathan Cook (1996, s. 10) twierdzą, że uczniowie uczą się najlepiej, gdy zostanie pobudzona ich chęć uczenia się. W klasie ma to najczęściej miejsce, jeśli uczniowie mają jasno wytyczony kierunek i cel, mogą bazować na wiedzy już zdobytej oraz aktywnie uczestniczą w lekcjach. Uczniowie włączają się aktywnie w proces uczenia się w klasie, jeśli znajdują się w korzystnym dla siebie środowisku, w którym nie ma szkodliwych dla zdrowia napięć i w którym mają prawo do popełniania błędów, mają możliwość pewnego wyboru i odpowiedzialności dotyczących tego, czego, kiedy i jak chcą się uczyć, mają czas na przemyślenie tego, czego się nauczyli, mają także czas na przyjrzenie się swojemu sposobowi uczenia się.

Przemysław Bąbel i Marzena Wiśniak (2008) rekomendują do zastosowania dwanaście kolejnych zasad, które dają szansę na skuteczne nauczanie. Pierwszą zasadą jest kierowanie uwagi uczniów na to, co mają zapamiętać. Dalej jest to ograniczenie liczby przekazywanych informacji poprzez grupowanie ich w kategorie oraz częste powtarzanie wymaganych treści. Należy zwrócić uwagę na odnośnienie nowych informacji do wiedzy uczniów, a najważniejsze informacje podawane powinny być na początku lekcji. Istotne dla efektywności jest angażowanie wyobraźni uczniów. Uczniowie powinni dostrzegać znaczenie nowej wiedzy w odniesieniu do nich samych, a nauczyciele powinni stwarzać okazje, by uczniowie nabywali wiedzę po-

przez doświadczenie. Wzbudzenie pozytywnych emocji oraz przerwy też służą nauce. Warto także dostarczać uczniom wskazówek do wydobywania informacji oraz nagradzać ich wysiłek. Prezentowana koncepcja, silnie związana z procesem zapamiętywania i wydobywania informacji z pamięci, ma charakter ponadprzedmiotowy, jednak jej elementy składowe warto wprowadzić do codziennej praktyki nauczania matematyki.

Tomasz Szwed (2006, s. 10) przytacza pięć cech sprzyjających procesowi dydaktycznemu, których autorstwo jest przypisywane Mihaly'emu Csikszentmihalyi – autorowi teorii doświadczeń optymalnych. Pierwszą cechą jest jasność oczekiwań, kiedy uczeń dobrze wie, czego oczekuje od niego nauczyciel. Drugą cechą jest życzliwe zainteresowanie ze strony nauczyciela. Dzieje się to wtedy, gdy uczeń ma poczucie, że nauczyciel traktuje go poważnie, a jego prace z uwagą. Kolejną cechą jest wolność wyboru. Ta cecha zakłada, że uczeń może łamać zasady ustanowione przez nauczyciela pod warunkiem, że jest gotów ponieść konsekwencje swoich wyborów. Czwartą cechą sprzyjającą procesowi dydaktycznemu jest poczucie bezpieczeństwa. Można o nim mówić, gdy uczeń rezygnuje z mechanizmów obronnych, nie ukrywa porażek i nie tłumaczy ich wyłącznie przyczynami zewnętrznymi. I wreszcie piątą cechą jest zapewnienie uczniom przez nauczyciela coraz bardziej złożonych możliwości działania. W takim klimacie uczniowie łatwiej znajdują motywację do żmudnych ćwiczeń i poddania się narzuconej dyscyplinie. Koncepcja Mihaly'ego Csikszentmihalyi jest typowo psychologiczna. Może jednak przyczynić się do poprawy klimatu podczas lekcji oraz poczucia bezpieczeństwa uczniów.

Kolejną koncepcją wartą uwagi jest zestaw strategii nauczania zaprezentowanych przez profesora Toma Corcorana (Teachers College Uniwersytetu Columbia, NY), który 17 listopada 2014 roku wygłosił wykład dla dyrektorów szkół warszawskich, współpracujących z Centrum Edukacji Obywatelskiej w programie Szkoła Ucząca się. Teachers College (dalej TC) zajmuje się praktykami, które mają oparcie w dowodach i badaniach. Oznacza to zintegrowanie indywidualnej opinii eksperckiej z najlepszymi dostępnymi dowodami empirycznymi, pochodzącymi z systematycznie prowadzonych badań. Podczas wykładu uczestnicy zostali zapoznani z kilkoma praktykami, które stosowane systematycznie przynoszą szczególnie skuteczne efekty. TC wybrało te praktyki, które mają znaczący i stały wpływ na proces nauki, są skuteczne w różnych kontekstach kulturowych i w pracy z różnymi uczniami, zwiększają ponadto motywację uczniów i intensywność ich pracy oraz mogą być zastosowane przy niewielkich nakładach finansowych. Są to: planowanie lekcji i zadań edukacyjnych, opracowywanie zadań o odpowiednich wymaganiach poznawczych, interakcja i współpraca uczniów, praca w parach i grupach, ocenianie kształtujące rozumiane jako monitorowanie postępów uczniów i udzielanie im informacji zwrotnej oraz umiejętne zadawanie pytań, stymulowanie dyskusji zorientowanej na ucznia, polecenie uczniom częstego zapisywania własnych przemyśleń, regularne odwoływanie się do przemyśleń uczniów oraz regularne podsumowania, zaawansowane projekty, w których zagadnienia zostają praktycznie zastosowane i zintegrowane. Jest kilka punktów wspólnych tej koncepcji z koncepcjami OECD. Jest to przede wszystkim praca w grupach oraz położenie akcentu na konstruowanie właściwych zadań.

Bill Rogers (2005, s. 121-126) zauważa, że efektywne nauczanie kojarzy się z fundamentalnymi wartościami, takimi jak szacunek w stosunku do wszystkich członków danej klasy oraz ich równorzędne traktowanie. Istnieją różnorodne elementy składające się na efektywne nauczanie, uzależnione od wieku uczniów i okoliczności, w jakich jest ono prowadzone. Nauczyciel jest pewny siebie, cierpliwy i uprzejmy. Wykazuje on także zainteresowanie tematem oraz aktywnie angażuje się w procesy, umożliwiające robienie postępów każdemu z uczniów. Nie zapomina o zauważeniu i wsparciu wysiłku uczniów, związanego z ich pracą i rozwojem, co w pozytywny sposób wpływa na motywację. Wyjaśnienia i instrukcje nauczyciela są jasne i formułowane tak, aby ułatwić uczniom ich zrozumienie i dostosowanie do swoich potrzeb i zdolności poznawczych. Nauczyciel zdaje sobie sprawę, że jego charakterystyczny głos i zachowanie mogą znacznie pomóc uczniom w skupieniu uwagi, w zainteresowaniu się tematem, nabyciu motywacji i we wzajemnej współpracy. Nauczyciel w sposób pozytywny i zróżnicowany używa metody zadawania pytań, aby motywować i śledzić rozumienie uczniów i podnosić jakość i wydajność ich myślenia. Nauczyciel śledzi rozwój danej lekcji oraz zachowanie grupy i jego poszczególnych uczniów i jego wpływ na proces nauczania i uczenia się. Nauczyciel chętnie i świadomie zachęca uczniów do podjęcia własnego wysiłku w celu robienia postępów i udziela im przemyślanych pochwał. Uwagę powinno zwracać się nie tylko na błędy i pomyłki ucznia, ale i na jego postępy i podejmowany wysiłek. Jakiegokolwiek zagrożenie wynikające z pojawienia się niewłaściwego, rozpraszającego innych zachowania jest minimalizowane poprzez skupianie się na centralnych zagadnieniach nauczania i uczenia się.

B. Rogers (2005, s. 154-155) wskazuje bardzo istotną rolę nauczyciela. Według niego skuteczni nauczyciele nauczają w przejrzysty sposób i sami przejawiają zainteresowanie tematem lekcji i potrzebami uczniów. Potrafią wytworzyć poczucie jedności i wzajemnej współpracy w klasie, związane ze wspólnym uczeniem się i bycie częścią danej klasy. Wprowadzają i utrzymują dyscyplinę i są przy tym sprawiedliwi. Rodzaj relacji, jaki nauczyciel nawiązuje i utrzymuje z klasą, jest podstawowym czynnikiem, mającym wpływ na efektywne nauczanie i uczenie się. Pozytywne relacje zwiększają prawdopodobieństwo współpracy uczniów podczas wprowadzania niezbędnej dyscypliny.

Carol Dweck (2014) promuje postawę nastawienia na rozwój. Według niej kształcenie i praca umożliwiają zmiany poziomu inteligencji, a głównym czynnikiem, który decyduje o tym, czy dana osoba osiągnie mistrzostwo, to nie wrodzone zdolności, ale celowe zaangażowanie. W przekonaniu uczniów nastawionych na rozwój, sukces polega na przekraczaniu kolejnych granic – na dążeniu do coraz większej mądrości. Umiejętności i osiągnięcia to rezultat zaangażowania i pracy. Według C. Dweck nie bez znaczenia jest postawa nauczyciela. Wybitni nauczyciele wierzą w rozwój intelektualny i talent, ale są zafascynowani również procesem przyswajania wiedzy. Wszystko zaczyna się od nastawienia na rozwój – swój własny i uczniów. Dobry nauczyciel to przede wszystkim ktoś, kto zdobywa wiedzę wraz ze swoimi uczniami. Koncepcje Rogersa i Dweck nie dotyczą dydaktyki ogólnej i szczegółowej, pokazują jednak rolę nauczyciela i jego kompetencji psychologicznych, jak również wskazują potrzebę pracy i wysiłku w nauczaniu i uczeniu się.

Szczególną rolę nauczyciela podkreśla również John Hattie (2015, s. 47-48), który w oparciu o swoje wieloletnie badania dowodzi, że nauczyciele są jednym z najistot-

niejszych czynników wpływających na uczenie się. Odnoszący sukcesy nauczyciele koncentrują się na poznawczym angażowaniu uczniów w treści, których uczą. Skupiają się na kształtowaniu sposobu myślenia i wnioskowania skoncentrowanego na rozwiązywaniu problemów. Skuteczni nauczyciele kładą nacisk na przekazywanie nowych zagadnień i nowych sposobów ich rozumienia, a następnie monitorują postępy uczniów. Skupiają się na zapewnieniu we właściwym czasie odpowiedniej informacji zwrotnej, aby pomóc uczniom osiągnąć korzyści z lekcji. Tacy nauczyciele poszukują również informacji zwrotnych na temat swojej siły oddziaływania na postępy i biegłość swoich uczniów jak również głęboko rozumieją procesy uczenia się. Takie podejście do roli nauczyciela odsta-je od założeń dydaktyki, która koncentruje się raczej na czynnościach nauczyciela, a nie na jego osobowości i postawie.

Problem skutecznego nauczania jeszcze w inny sposób przedstawia Robert J. Marzano (2012, s. 14). Proponuje on model Projektu Działań Edukacyjnych, czyli pytań, na które powinien odpowiedzieć sobie każdy poszukujący skuteczności nauczyciel. Pytań jest dziewięć.

1. Jak określić i przedstawić cele nauczania, śledzić postępy uczniów oraz świętować ich sukcesy?
2. Jak pomóc uczniom w skutecznym wykorzystaniu wiedzy?
3. Jak pomóc uczniom w utrwaleniu i pogłębieniu nowo zdobytej wiedzy?
4. Jak pomóc uczniom w stawianiu i sprawdzaniu hipotez?
5. Jak zaangażować uczniów?
6. Jak określić reguły i procedury rządzące zachowaniem się w klasie?
7. Jak kontrolować przestrzeganie reguł i procedur w klasie?
8. Jak nawiązać i utrzymać dobrą relację z uczniami?
9. Jak komunikować wysokie wymagania wobec wszystkich uczniów?

Próba odpowiedzi na tak postawione pytania wymaga od nauczycieli dużej od-wagi i głębokiej refleksji. W praktyce szkolnej, nastawionej na realizację podstawy programowej oraz przygotowanie do egzaminów zewnętrznych, warunki do reflek-syjności są bardzo niekorzystne.

Jedną z najnowszych koncepcji efektywnego nauczania matematyki jest pomysł Jo Boaler (2016). Według autorki *Mathematical Mindsets* każdy uczeń może opanować wiedzę matematyczną na najwyższym dla siebie poziomie. Rozwój matematyczny jest możliwy i w dużej mierze zależy od nastawienia ucznia. Popełnianie błędów są cenne, ponieważ stymulują rozwój skłaniając do twórczej refleksji. Ważna jest pozytywna reakcja nauczyciela, bo ona sprzyja tworzeniu się nowych połączeń nerwo-wych. Pytania są bardzo ważne. Nauczyciel powinien zatem wspierać ucznia w zada-waniu pytań. Matematyka odnosi się do kreatywności i zdrowego rozsądku. Należy zadbać o wizualizację poszczególnych etapów rozwiązywania zadań. Matematyka dotyczy komunikacji i szukania powiązań. Podejmować należy działania przyczynia-jące się do przybliżenia i zrozumienia pojęć. Lekcja matematyki polega na uczeniu się, a nie na wykazywaniu się poszczególnych uczniów. Nauczenie się matematyki wymaga czasu i jest związane z wysiłkiem. Pełnia zrozumienia jest ważniejsza niż szybkość rozwiązywania zadań. Nauczyciele powinni docenić ucznia i pokazywać ważność oraz skuteczność jego rozumowania. Jo Boaler i jej postrzeganie nauczania matematyki jest swego rodzaju kwintesencją wszystkich wymienionych koncepcji.

Wymienione i krótko opisane koncepcje efektywnego nauczania mogą być znakomitym dopełnieniem praktyk nauczania opartych na zasadach dydaktyki matematyki. Uważna analiza ich treści wskazuje na ich interdyscyplinarność. Najnowsze zdobycze psychologii, socjologii i neurobiologii powinny odgrywać ważną rolę w nauczaniu matematyki i w żaden sposób nie można ich pomijać. Wspólnymi cechami koncepcji są: wzbudzanie motywacji do nauki, rola pracy zespołowej, dobra komunikacja nauczyciel – uczeń, refleksyjność i poczucie bezpieczeństwa. Wszystkie wymienione cechy to czynniki wspomagające dobre nauczania każdego przedmiotu, również matematyki. Filarem jednak powinna być dydaktyka i jej praktyczne zastosowania.

EFEKTYWNE NAUCZANIE MATEMATYKI GEORGE'A POLYI

Według jednego z najwybitniejszych dydaktyków matematyki w historii, George'a Polyi (1975, s. 290-334), nauczanie jest sztuką, w szczególności nauczanie matematyki. Przed omówieniem najbardziej efektywnych metod nauczania należy przygotować podbudowę szczególnie efektywnych metod uczenia się. Polya wyróżnia trzy główne metody uczenia się: aktywne uczenie się, najwłaściwsza motywacja i następstwo faz. Uczenie powinno być aktywne, a nie pasywne lub recepcyjne. Ma prowokować pracę umysłu. Najlepszy sposób na nauczenie się czegośkolwiek, to odkrycie tego samemu. Aby uczenie się było efektywne, uczący się powinien samodzielnie odkryć możliwie największą część przyswajanego materiału. Aktywne uczenie się jest związane z zaangażowaniem i samodzielnością. Uczący się nie okaże jednak aktywności, gdy brakuje mu motywacji. Trzeba zatem pobudzać ucznia do aktywności pewnymi bodźcami, na przykład nadzieją na nagrodę. Jednakże najlepszym bodźcem pobudzającym do nauki jest zainteresowanie przyswajanym materiałem, a najcenniejszą nagrodą za okazaną aktywność jest zadowolenie, dostarczane przez intensywny wysiłek umysłowy. Aby uczenie się było efektywne, uczeń powinien być zainteresowany przyswajanym materiałem i znajdować zadowolenie z powodu swojej aktywności. Jednakże oprócz tych najwłaściwszych motywów do nauki, istnieją także inne, których część także jest pożądana. Można tu wymienić obawę przed karą lub lęk przed porażką. Wszelkie poznanie ludzkie zaczyna się od intuicji, prowadzi dalej ku pojęciom i kończy się ideami. Uczenie się rozpoczyna się od działania i przyswajania, prowadzi dalej ku słowom i pojęciom, a powinno się kończyć pożądanym sposobem myślenia. Polya wyróżnia trzy fazy rozwiązywania przez ucznia zadań: faza badania, formalizacji i przyswajania. Faza pierwsza, najbliższa działaniu i percepcji, rozwijana jest na najbardziej intuicyjnym, heurystycznym poziomie. Faza druga, formalizacji, prowadzi do wyższego, bardziej pojęciowego poziomu, a to dzięki wprowadzaniu terminów, definicji i dowodów. Faza przyswajania jest próbą dostrzeżenia tego, co w zadaniu najważniejsze. Przyswajany materiał powinien być tu opanowany już przez ucznia, włączony do zbioru jego wiedzy, zawarty w jego horyzoncie myślowym. Faza ta toruje drogę z jednej strony do zastosowań, z drugiej zaś do zaawansowanych uogólnień. Faza badania powinna poprzedzać fazę werbalizacji i formowania pojęć oraz, ewentualnie, włączenie przyswajanego materiału do systemu wiedzy, określającej postawę myślową ucznia.

Konkludując, Polya do skutecznych metod uczenia się zalicza samodzielność, zaangażowanie, motywację oraz dobry warsztat pracy przy rozwiązywaniu zadań matematycznych będących narzędziem do kształtowania umysłów uczniów. Mając na uwadze wcześniej wymienione współczesne koncepcje, nie trudno zauważyć, że pomysł Polya jest z nimi bardzo zbieżny. Biorąc pod uwagę czas publikacji pierwszego anglojęzycznego wydania *Odkrycia matematycznego*, 1962 rok, należy na dokonania Polya spojrzeć z dużym uznaniem i szacunkiem. Każdej metodzie uczenia się odpowiada adekwatna do niej metoda nauczania (Polya, 1975, s. 296-298). Takie logiczne powiązanie uczenia i nauczania może być bardzo pomocne w praktycznym zastosowaniu w rzeczywistości szkolnej.

Aktywne uczenie się

Uczniowie powinni odkrywać sami tak dużo, jak jest to możliwe w danych warunkach. Powinni zatem uczestniczyć aktywnie w formułowaniu zadania, które przyjdzie im później rozwiązywać. Rozwiązanie zadania wymaga mniejszej przenikliwości i oryginalności niż jego sformułowanie. Tak więc pozwalając uczniom na uczestnictwo w sformułowaniu zadania, nie tylko daje się im możliwość wytrwałej pracy, lecz również rozwijania także pożądanых właściwości ich umysłu.

Najwłaściwsza motywacja

Obowiązkiem nauczyciela jest przekonanie ucznia, że matematyka jest interesująca, że rozpatrywana aktualnie sprawa jest ciekawa i że rozważane zadanie zasługuje na jego wysiłek. Nauczyciel powinien przywiązywać wagę do wyboru, sformułowania i właściwego przedstawienia proponowanego przez siebie zadania. Także z punktu widzenia ucznia zadanie powinno być sensowne i mające jakiś związek z rzeczywistością. Powinno wiązać się ono, jeśli jest to możliwe, z codziennością ucznia, a także wprowadzać, w miarę możliwości, żart lub niewielki paradoks. Jeżeli zamierzamy pobudzić ucznia do rzetelnego wysiłku, to musimy mu dać pewne dowody na to, że dzieło godne jest tego wysiłku. Najwłaściwszy sposób motywacji uczniów, to zainteresowanie ucznia zadaniem.

Następstwo faz

W szkole powinno się prezentować zadania kontrastujące z zadaniami rutyniar-skimi, zadania o bogatym kontekście, zasługujące na dalsze badania, a także dające możliwość zasmakowania w pracy naukowej. Ważną rolą nauczyciela matematyki jest zatem dobór właściwych zadań dla uczniów o rozmaitych możliwościach i predyspozycjach.

Wymienione trzy metody uczenia się i nauczania Polya ubogaca zestawem dziesięciu przykazań dla nauczycieli. Wybór właśnie tych, a nie innych jest rezultatem olbrzymiego doświadczenia i obserwacji pracy wielu nauczycieli. Uniwersalność i pragmatyzm dekalogu Polya budzi szacunek również wśród współczesnych nauczycieli matematyki i wart jest ciągłego upowszechniania nie tylko w edukacji matematycznej. Polya zachęca nauczycieli by byli zainteresowani swym przedmiotem. Istnieje bowiem tylko jedna niezawodna metoda nauczania: jeśli nauczyciel jest zafascynowa-

ny swym przedmiotem, to także cała klasa z pewnością zostanie nim zafascynowana.

Kolejną radą wybitnego pedagoga jest poznanie swojego przedmiotu. Jeśli przedmiot nie jest obiektem zainteresowania nauczyciela, to nie powinien on go wykładać. Bez zainteresowania, pasji, zaangażowania nauczyciel nie pozna swojego przedmiotu. Nauczyciele powinni wiedzieć, że najlepszym sposobem na nauczenie się czegoś jest odkrycie tego samego. Dydaktyk powinien wiedzieć jak się uczyć i powinien poznać proces uczenia się na drodze osobistego doświadczenia nabytego w trakcie własnej nauki i z obserwacji uczniów. Polya zachęca do podjęcia trudu czytania w twarzach uczniów, dostrzegania ich oczekiwań i trudności oraz umiejętnego postawienia się na ich miejscu. Nauczyciel powinien nawiązać kontakt z klasą, choćby poprzez relacje z poszczególnymi uczniami. Powinien być zdolny do spostrzegania rzeczy z perspektywy ucznia. Musi umieć podtrzymać ucznia na duchu i być dla niego wsparciem we właściwej chwili. Dobrze jest również zbierać od uczniów informację zwrotną na temat swojego nauczania. Bardzo ważną kwestią jest przekazywanie uczącym się nie tylko wiadomości, lecz również umiejętności, postaw myślowych oraz nawyków pracy metodycznej. Na całość wiedzy składają się wiadomości i umiejętności. Umiejętność to biegłość, zdolność do korzystania z wiadomości, użycia ich we właściwy sposób. Umiejętności można określić jako zbiór użytecznych nawyków myślowych, zdolność do pracy metodycznej. Kolejne przykazania można opisać w formie życzeń. Niech uczniowie uczą się odgadywać i niech uczą się udowadniać. Zdolność odgadywania to fundamentalna postawa umysłowa. Nauczenie rozumnego i ukształtowanego zgadywania opartego na rozsądnym zastosowaniu indukcji i analogii, jest bardzo poważnym wyzwaniem dla nauczyciela. Matematyka jest dobrą szkołą rozumowania wiarygodnego i dedukcyjnego. Można wobec tego kształtować u uczniów umiejętność dowodzenia. Nauczyciele powinni sprzyjać dostrzeganiu tych cech zadania, które, sugerując metodę ogólną, mogą być użyteczne przy rozwiązywaniu innych zadań. Uczniowie rozwiązując określone grupy zadań gromadzą doświadczenie niezbędne przy rozwiązywaniu bardziej złożonych zadań. Umiejętności to najbardziej wartościowa część wiedzy matematycznej, znacznie bardziej wartościowa od wiadomości. Uczniowie mogą nabyć umiejętności jedynie przez naśladowanie i praktykę. Nauczyciel powinien zatem dokładnie wyjaśnić uczniom, jak rozwiązywać podstawowe typy zadań, czyli wyposażyć uczniów w niezbędne narzędzia. Wartościowe wydaje się śledzenie rozwiązań zadań zapisanych w podręcznikach i zbiorach zadań. Rozwiązując zadanie należy pokazać istotnie pouczające aspekty tego rozwiązania. Aspekt jest pouczający, jeśli zasługuje na naśladowanie. Umiejętne podkreślenie właściwości może przekształcić rozwiązanie w modelowe, w godną zapamiętania metodę, której naśladowanie może pozwolić uczniowi na uzyskanie rozwiązania innych zadań. Polya przestrzega przed wyręczaniem uczniów w rozwiązywaniu zadań. Niech rozwiążą sami tyle, ile jest to możliwe. Praktyką nauczycielską, która jest nie do przyjęcia jest narzucanie uczniom swojego zdania. Sztuką jest właściwe i delikatne sugerowanie rozwiązania.

Wartym uwagi materiałem G. Polya (2005, s. 327-328) jest również jego sposób rozumienia poziomów wiedzy uczniowskiej. Jest to swego rodzaju taksonomia opanowania reguł matematycznych. Każdy poziom można z powodzeniem przypisać do aktualnie obowiązującej w Polsce skali ocen. Jeśli w zdaniu występuje słowo „reguła”

to oznacza ono dowolną regułę matematyczną. Możemy zatem matematyczną wiedzę uczniów opisać na pięciu poziomach: (I). Poziom mechanicznego opanowania reguły. Uczeń opanował regułę pamięciowo, przyjmując ją na wiarę, bez dowodu, jest jednak w stanie poprawnie ją zastosować. (II). Poziom indukcyjnego opanowania reguły. Uczeń wypróbował regułę w pewnych prostych przypadkach, w których, jak się przekonał, zastosowanie jej daje poprawny wynik. (III). Poziom racjonalnego opanowania reguły. Uczeń zrozumiał dowód reguły. (IV). Poziom intuicyjnego opanowania reguły. Uczeń zrozumiał regułę jasno i wyraziście, jest pewien, iż jest ona prawdziwa. (V). Poziom wiedzy dobrze utrwalonej, dobrze powiązanej, dobrze zorganizowanej.

Analizując metody nauczania, powiązane z metodami uczenia się, należy zwrócić uwagę przede wszystkim na podkreślenie przez Polyę roli nauczyciela. Nie da się go w żaden sposób wyręczyć ani zastąpić. Takie podejście do roli nauczyciela pokazuje również większość opisanych wcześniej koncepcji nauczania. Polya pokazuje również rolę pracy, doboru zadań, zainteresowania uczniów, bardzo zadaniowo rozumianej motywacji. Podobne spostrzeżenia można znaleźć w koncepcjach Jo Boaler i Carol Dweck. Warto również zauważyć transgresyjność postrzegania rzeczywistości edukacyjnej przez George'a Polyę. Będąc dydaktykiem matematyki nie stronił od czerpania ze źródeł psychologii. Jego dekalog może wydawać się bardzo życzeniowy, jednak taka przecież jest rola pedagogów. Mają pokazywać jak być powinno.

PODSUMOWANIE

Jak zatem uczyć matematyki (i nie tylko) skutecznie? Odpowiedź na to pytanie jest niesłychanie trudna i na pewno niejednoznaczna. Różne koncepcje skutecznego nauczania pokazują kierunek poszukiwań, a pomysły G. Polyi nadają im nawet bardzo praktyczny wymiar. Należy mieć jednak świadomość wieloznaczności i złożoności pojęcia efektywnego nauczania. Jest to istotnie szczególne wobec odkryć współczesnej psychologii poznawczej. Michael Schneider i Elsbeth Stern (2014, s. 109-140) wymieniają i opisują dziesięć najważniejszych odkryć kognitywnych badań nad uczeniem się. Uczenie się leży przede wszystkim po stronie ucznia (Polya nazywa to samodzielnością). Powinno brać pod uwagę posiadaną już wiedzę. Uczenie się wymaga integracji struktur wiedzy oraz łączy przyswajanie koncepcji, umiejętności i kompetencji metakognitywnych. Uczenie się buduje skomplikowane struktury wiedzy poprzez hierarchiczne ustawianie bardziej podstawowych jej elementów oraz może wykorzystywać struktury świata zewnętrznego do organizowania struktur wiedzy w umyśle (Polya opisuje następstwo faz). Uczenie się nie jest w stanie przekroczyć ograniczeń ludzkich zdolności do przetwarzania informacji i jest wynikiem dynamicznej wzajemnej zależności między emocjami, motywacją a poznaniem (Polya opisuje najwłaściwszą motywację). Uczenie się powinno tworzyć struktury wiedzy podatne na przeniesienie i, co niezwykle istotne, wymaga czasu i wysiłku. Niektóre postulaty najnowszych odkryć kognitywnych można znaleźć w koncepcji Polyi. Ponad pięćdziesiąt lat różnicy między publikacją obu źródeł musi budzić respekt wobec podejścia węgierskiego dydaktyka.

Patrząc na problem bardziej praktycznie i biorąc pod uwagę wpływ neuroedukacji, można efektywność w nauczaniu podsumować w następujący sposób. Uczniowie uczą się lepiej, gdy ich nauczyciele są ekspertami w swojej dziedzinie i pokazują im

piękno swojego przedmiotu. Lepsze uczenie dokonuje się również wtedy, gdy nauczyciele wierzą w możliwości uczniów. Uczniowie wiedzą, że uczą się sami i chcą to robić lepiej. Dostają zadania praktyczne, związane z codziennym życiem i doświadczeniem. Nauczyciele uczą rzeczy przydatnych i ważnych. Uczniowie wiedzą dlaczego i po co się czegoś uczą. Znają kryteria sukcesu a nauczyciele poświęcają czas na refleksję, czego się nauczyli ich uczniowie. Nową wiedzę budują na wiedzy już poznanej. Nauczyciele interesują się tym, co uczniowie już wiedzą na dany temat. Lekcje są dialogiem. Nauczyciele są otwarci na dyskusję i błędne odpowiedzi uczniów. Nauczyciele świadomie uczestniczą w procesie uczenia się swoich uczniów. Dydaktycy angażują uczniów w poznawanie nowych zagadnień. Zadają pytania, na które wspólnie z uczniami poszukują odpowiedzi. Nauczyciele pozwalają uczniom myśleć samodzielnie. Uczniowie wykonują zadania w grupach, uczą się współpracy i oceny koleżeńskej. Dzielą odpowiedzialność za swoją naukę z nauczycielami. Uczniowie są gotowi planować swój proces uczenia się i realizować ten plan.

A może jednak prostota George'a Polya? Skupienie się na trzech metodach nauczania (*metody aktywizujące*) ściśle związanych z trzema metodami uczenia się uczniów (*metody aktywne*). Już sam autor tego pomysłu zostawia pewną dowolność pisząc, że „każdy dobry nauczyciel jest różny od innego dobrego nauczyciela” (Polya, 1975, s. 290). W gąszczu wielu współczesnych koncepcji efektywnego nauczania warto wziąć pod uwagę rady Polya pracować z uczniami, wsłuchując się w ich możliwości oraz zachowując przy tym swój własny i niepowtarzalny nauczycielski styl. Nie można przy tym zapominać o zdobyczach dydaktyki matematyki, która stanowi niepodważalny fundament procesu nauczania i uczenia się.

BIBLIOGRAFIA

1. Anthony, G., Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics*. Educational Practices – 19. Belley: UNESCO. https://nzmaths.co.nz/sites/default/files/images/EdPractices_19.pdf [Dostęp 31 12 2017].
2. Bąbel, P., Wiśniak, M. (2008). *Jak uczyć, żeby nauczyć?* Warszawa: WSIP.
3. Boaler J. (2016). *Mathematical Mindsets*. San Francisco: John Wiley and Sons Ltd.
4. Brophy, J. (1999). *Nauczanie*. Educational Practices – 1. Lausanne: UNESCO, http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices_01_pol.pdf[Dostęp 30.09.2017].
5. Dweck, C. (2014). *Nowa psychologia sukcesu*. Warszawa: Muza.
6. Fisher, R. (1999). *Uczymy, jak myśleć*. Warszawa: WSIP.
7. Hattie, J. (2015). *Widoczne uczenie się dla nauczycieli*. Warszawa: CEO.
8. Marzano, R. (2012). *Sztuka i teoria skutecznego nauczania*. Warszawa: CEO.
9. Perrott, E. (1995). *Efektywne nauczanie*. Warszawa: WSIP.
10. Polya, G. (1975). *Odkrycie matematyczne*. Warszawa: WNT.
11. Reid, J. A., Forrestal, P., Cook, J. (1996). *Uczenie się w małych grupach w klasie*. Warszawa: WSIP.
12. Rogers, B. (2005). *Uczniowie w szkole. Rzecz o wychowaniu*. Warszawa: Wydawnictwo Fraszka Edukacyjna.
13. Schneider M., Stern E. (2013). *Uczenie się z perspektywy poznawczej: dziesięć najważniejszych odkryć*. W: Benavides F., Dumont H., Istance D. (2013). *Istota uczenia się. Wykorzystanie wyników badań w praktyce*. Warszawa: Wolters Kluwer.
14. Sterna, D., Strzemieczny J. (2012). *Organizacja procesów edukacyjnych dla wspierania uczenia się*. W: *Jakość edukacji. Różnorodne perspektywy*. (Red.) Grzegorz Mazurkiewicz. Kraków: Wydawnictwo UJ, s. 126.
15. Szwed, T. (2006). System motywowania uczniów. *Nowy Biuletyn Szkolny WOM Opole*, Nr 1(149), s. 10.
16. Walberg, H., Paik, S. (2000). *Skuteczne kształcenie*. Educational Practices – 3. Lausanne: UNESCO http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices_03_pol.pdf [Dostęp 30.09.2017].
17. Vosniadou, S. (2001). *Jak dzieci się uczą. Skuteczne kształcenie*. Educational Practices – 7. Bellegrade: UNESCO http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices_07_pol.pdf [Dostęp 30.09.2017].